KTH Matematik

Partiella differentialekvationer för ME SF1648 och K SF1641

Tentamen torsdag 2008–05–29, kl $08^{00} - 13^{00}$

Hjälpmedel: BETA Mathematics Handbook.
Räknedosa utan program.

Obs 1: Uppgifterna är ordnade varken kurskronologiskt eller efter svårighetsgrad.

Obs 2: Behandla inte mer än en uppgift per blad.
Varje steg i lösningen skall motiveras.
Bristfällig motivering kan ge poängavdrag.
Skriv namn och personnummer på varje inlämnat ark.
Fyll i antalet inlämnade ark på omslaget.

Tentamen består av fem uppgifter, vilka sammanlagd ger 25 poäng.
Efter tentans slut publiceras ett lösningsförslag på nätet.

Ansvarig: Franz J Čech

En användbar formel: För $k \geq 0$, $a > 0$ och $\alpha > 0$ gäller

$$\boxed{\int\limits_{r=0}^{a} (a^2 - r^2) r^{k+1} J_k\left(\frac{\alpha}{a}\, r\right) dr = 2\, \frac{a^{k+4}}{\alpha^2} J_{k+2}(\alpha)}$$

---

1) Bestäm med hjälp av potensserieansats av typen

$$y(x) = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

den s k Frobenius's metoden, där r är ett obestämt tal, två linjärt oberoende lösningar kring $x = 0$, till ekvationen

$$2x^2 y'' + (3x + 2x^2) y' - (1 - x) y = 0$$

Det räcker att ta med de fyra första termerna skilda från noll i vardera lösningen.

---

v.g.v.

2) Bestäm en lösning till randvärdesproblemet

$$
\begin{aligned}
&\texttt{PDE:}\quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1,\ t > 0 \\
&\texttt{RV:}\quad \begin{cases} u(1,t) = 3, & t > 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0, & t > 0 \end{cases} \\
&\texttt{BV:}\quad u(x,0) = 3 + \cos\frac{3\pi x}{2}, \quad 0 < x < 1.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

---

3) För en oändlig lång stav gäller värmeledningsekvationen

$$\texttt{PDE:}\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0$$

Temperaturen vid $t = 0$ ges av funktionen

$$\texttt{BV:}\quad u(x,0) = \mathrm{e}^{-x^2} + \mathrm{e}^{-x^2/2}$$

Bestäm temperaturen $u(x,t)$ för alla $t > 0$ m h a lämplig transform.

---

4) Lös randvärdesproblemet

$$
\begin{aligned}
&\texttt{PDE:}\quad \frac{\partial u}{\partial t} = 2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ 0 < x < 1,\ t > 0 \\
&\texttt{RV:}\quad \begin{cases} u(0,t) = 0, & t > 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(1,t) = 0, & t > 0 \end{cases} \\
&\texttt{BV:}\quad u(x,0) = -x^2 + 2x,\ 0 < x < 1.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

---

5) Ett cirkulärt inspänt membran med radien 3 har vid tiden t = 0 en avvikelse $f(r,\theta)$ från det plana jämviktsläget. Initialhastigheten är noll vid tiden t = 0.
Uttryckt i matematiska termer innebär detta att vi skall lösa randvärdesproblemet:

$$
\begin{aligned}
&\texttt{PDE:}\quad \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}, \quad 0 < r < 3,\ 0 < \theta < 2\pi,\ t > 0 \\
&\texttt{RV:}\quad \begin{cases} u(3,\theta,t) = 0, \\ u(0,\theta,t) < \infty \\ u(r,0,t) = u(r,2\pi,t) \\ \dfrac{\partial u}{\partial \theta}(r,0,t) = \dfrac{\partial u}{\partial \theta}(r,2\pi,t) \end{cases} \qquad \texttt{BV:}\quad \begin{cases} u(r,\theta,0) = f(r,\theta), \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(r,\theta,0) = 0 \end{cases}
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Bestäm utsvängningen $u(r,\theta,t)$ av membranet då $f(r,\theta) = (9-r^2)r^2\cos 2\theta$ och $c = 1$

Lycka till!

Franz J